# 信息经济学

## 第六课：序贯博弈（二）

彭世喆

数字经济系
长沙理工大学经济与管理学院

2024 年 4 月 11 日

# 策梅洛定理

## 完美信息（Perfect information）

每个玩家都观察到了游戏历史，即玩家在决策时知道在哪一个节点以及是如何到达这个节点的。

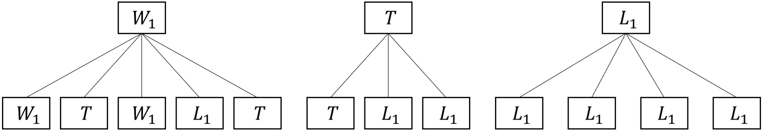
## 策梅洛定理（Zermelo's theorem）

在二人的有限（有限个节点）游戏中，如果双方皆拥有完美信息，则先行者或后行者当中必有一方有必胜/必不败（平局）的策略。

- 三种结果：$W_1$，$L_1$ 和 $T$
- 这个定理不是说这类博弈有三种结果，而是表明是有解的，但没有说明解是什么以及如何解
- 例子：Nim 游戏（当两堆火柴数量不相等时，无论玩家 2 做什么，玩家 1 稳赢）、井字游戏（先行并占角）、象棋和围棋

# 证明

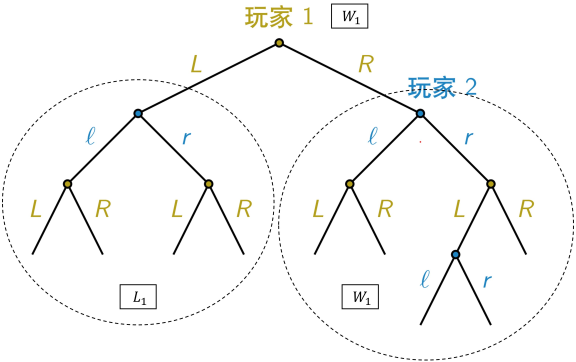
- 逆向归纳法（关于决策树的最大长度 $N$）
- 内在逻辑
- 当 $N = 1$ 时，假设玩家 1 先行，穷举所有可能的情况。例如




- 假设定理对于所有长度 $\leq N$ 的博弈成立

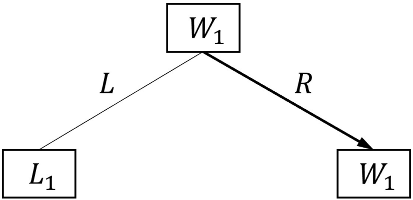
# 证明

- 那么定理对于所有长度 $= N+1$ 的博弈也成立（证明的关键步骤）。下图所示一个最大长度为 $N+1=4$ 的例子
- 虚线圈出的部分叫做子博弈（Subgame），即博弈中更小的博弈。左边的子博弈发生在玩家 1 选择 $L$ 后，长度为 2。右边的子博弈发生在玩家 1 选择 $R$ 后，长度为 3。



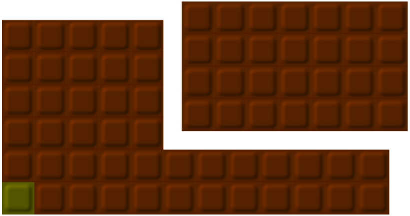
## 证明

- 由归纳假设可知，两个子博弈都有解，例如分别为 $L_1$ 和 $W_1$
- 原博弈可被化简为长度为 1 的博弈，并且有解。玩家 1 会选择 $R$



# 例子：巧克力游戏（Chomp）

- 有一块 $n \times m$ 的巧克力，两人轮流选择一小块巧克力并拿走它右边和上边的所有巧克力。吃掉最左下角巧克力的玩家输
- 根据策梅洛定理，这个游戏有解
- 除了 $1 \times 1$ 的巧克力，对于其他大小的巧克力，先行者必胜（排除平局和后行者必胜，假设先行者选择最右上角的巧克力）

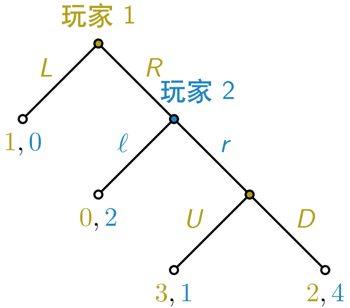


# 序贯博弈中的纯策略

## 序贯博弈中的纯策略（Pure strategy）

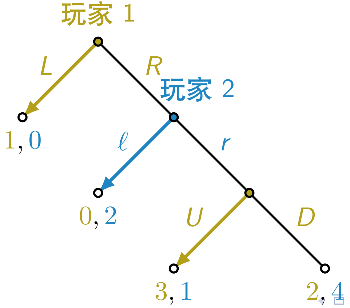
在拥有完美信息的序贯博弈中，玩家的纯策略是完整的行为计划，确定了在每一个决策节点上玩家应该选择什么行为。

- 例子：玩家 1 的策略集 $=\{(L,U),(L,D),(R,U),(R,D)\}$，玩家 2 的策略集 $=\{\ell,r\}$



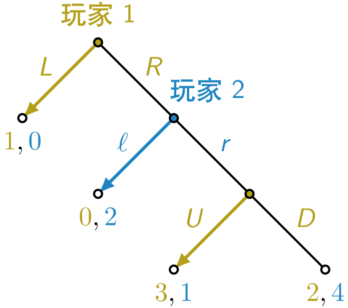
# 序贯博弈中的纯策略

- 玩家 1 不是只有三个策略，但前两个策略是冗余的。玩家 2 可能不用做决策。但一个策略必须告诉玩家在每个决策节点采取什么行为，不管能不能到达这个节点
- 由逆向归纳法得到每一个节点的最优决策 $(LU, \ell)$
- 逆向归纳法必须告诉玩家 1 决策时应该怎么做，以及玩家 2 认为玩家 1 会怎么做（虽然 $U$ 和 $r$ 不会实现，但也是逆向归纳法的一部分）



# 序贯博弈中的纯策略

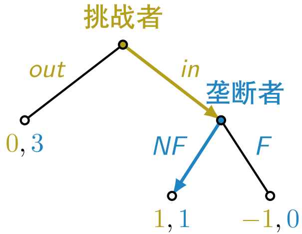
- 纳什均衡 $= ((LU, \ell), (LD, \ell))$
- 前两行可见冗余。在第二个纳什均衡中，玩家 1 选 $D$ 是不理性的。但怎么选无所谓，反正到不了这一步
- 机械式寻找纳什均衡会发现不理性的行为，因为找到了永远不会发生的结果




| | | 玩家 2 | |
|---|---|---|---|
| | | $\ell$ | $r$ |
| 玩家 1 | $LU$ | $\underline{1}, \underline{0}$ | $1, \underline{0}$ |
| | $LD$ | $\underline{1}, \underline{0}$ | $1, \underline{0}$ |
| | $RU$ | $0, \underline{2}$ | $\underline{3}, 1$ |
| | $RD$ | $0, 2$ | $2, \underline{4}$ |

# 市场准入游戏

- 有一家垄断公司，面对着一个可能侵入市场的挑战者
- 纳什均衡 $= ((in, NF), (out, F))$
- 在第二个纳什均衡中，也是互为最优反应。假如垄断者威胁会反击，则挑战者会观望。均衡成立需要相信一个不可信的威胁（杀鸡儆猴）




垄断者

| 挑战者 | | F | NF |
|---|---|---|---|
| | in | $-1, 0$ | $\underline{1}, \underline{1}$ |
| | out | $\underline{0}, \underline{3}$ | $0, \underline{3}$ |

## 拓展：多个垄断市场

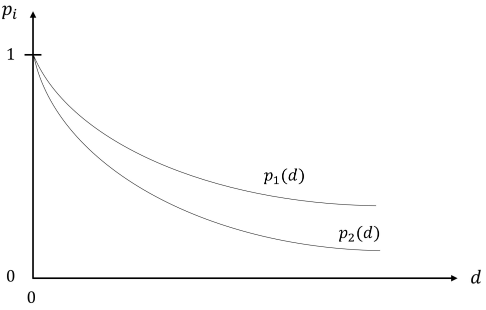
- 一个垄断者拥有多个垄断市场，挑战者序贯进入，并知道上一个挑战者和垄断者之间博弈的结局
- 选一列同学玩游戏（杀鸡儆猴有用）
- 逆向归纳法得出最后一个市场的挑战者会进入，因为垄断者没有继续威胁的动机，进而垄断者会让所有人进入
- 理论不能解释现实（Chain-store paradox）
- 垄断者以 $\epsilon = 1\%$ 的概率是激进者，当挑战者进入会采取反击行为。那么它可以通过反击阻止进入（无论是激进还是装成激进）
- 第一个市场的挑战者会进入，因为觉得是激进者的概率很小。一旦反击，后续挑战者仍然分不清到底真是还是假装是
- 只有垄断者采取混合策略偶尔反击，挑战者才会更新是激进者的概率

# 分析

- 如何建立激进的形象（Reputation）
- 引入小概率的激进行为可以改变博弈结果
- 形象很重要
  - 可以装出来
  - 可以阻止潜在挑战者（例如不要仅仅因为有人质而向绑架者妥协）
  - 医生和会计的声誉很重要
  - 脾气差的人更容易得逞（有时是故意的）

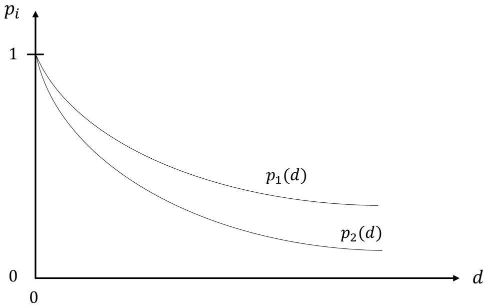
# 扔沙包游戏

- 有两位玩家相对站立，一人手上有一个沙包。两人轮流决策是将沙包扔过去还是向前走一步。沙包击中对方则赢，没中则输，对方不能躲闪。
- 这是关于 when 而不是关于 what 的决策，太早或太迟都不行
- 记 $p_i(d)$ 为玩家 $i$ 在距离 $d$ 击中对方的概率（技术有高低，但都知道）



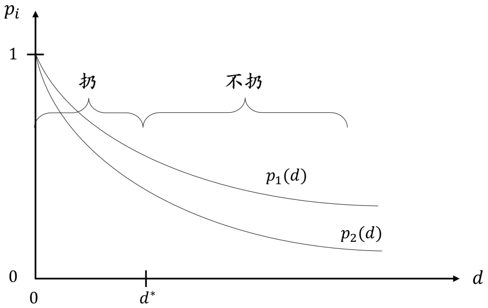
## 游戏分析

- 谁会先扔？(技术高的先扔还是技术低的抢扔)
- 事实 $A$：假设还没有人扔，如果玩家 $i$ 在距离 $d$ 知道对手不会在距离 $d-1$ 扔，则玩家 $i$ 不应该在距离 $d$ 扔（不用害怕对方过早扔沙包）
- 事实 $B$：假设还没有人扔，如果玩家 $i$ 在距离 $d$ 知道对手会在距离 $d-1$ 扔，则当 $p_i(d) \geq 1 - p_j(d-1)$ 时，玩家 $i$ 应该在距离 $d$ 扔



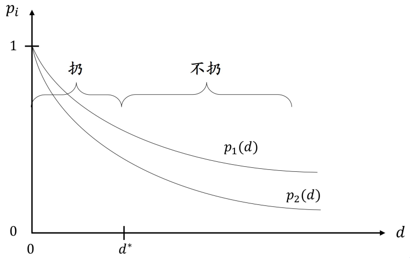
## 游戏分析

- 随着 $d$ 变小，记 $d^*$ 为 $p_i(d)+p_j(d-1)\geq 1$ 首次成立的距离
- 在距离 $d^*$，当 $p_1(d^*)+p_2(d^*-1)\geq 1$ 时，玩家 1 率先扔出沙包；当 $p_2(d^*)+p_1(d^*-1)\geq 1$ 时，玩家 2 率先扔出沙包
- 当距离大于 $d^*$ 时，不扔严格占优于扔（无论对手下一轮扔不扔，不扔都比扔好）



## 游戏分析

- 但在距离 $d^*$，出现了分歧，最优反应取决于关于对方下一阶段行为的预测
- 用逆向归纳法推出在距离 $d^*-1$，对方将会扔出沙包
  - 当 $d=0$ 时，玩家 2 一定会扔，因为 $p_2(0)=1$
  - 当 $d=1$ 时，玩家 1 知道玩家 2 下阶段一定会扔，由事实 $B$ 可得，玩家 1 会选择扔，因为 $p_1(1)+p_2(0)\geq 1$
  - ...
  - 当 $d=d^*$ 时，玩家 $i$ 知道对方下阶段一定会扔，由事实 $B$ 可得，玩家 $i$ 会选择扔



# 启示

- 技术好的玩家并不一定先扔，而是看谁在距离 $d^*$ 行动（$d^*$ 取决于双方的能力）
- 即使对方不会玩这个游戏，也不要远于距离 $d^*$ 扔
- 事实：人们通常过早扔出沙包，然后没中（过度自信、先下手为强）

**经验 15**

等待有时是个好选择，但不要保守。

# 一阶段议价游戏

- 有两位玩家，玩家 1 向玩家 2 提出一个 1 元钱的分配方案 $(s, 1-s)$
- 如果玩家 2 接受，则按分配方案执行；如果玩家 2 拒绝，则双方都没钱 $(0,0)$
- 假设如果玩家 2 接不接受方案的效用相同，则会接受方案（可以给的不多也不少）
- 玩游戏
- 事实：有人拒绝小额的分配方案（自尊、公平、强势声誉、独裁者游戏没有拒绝的机会）
- 理论：由逆向归纳法可得，玩家 1 会提出 $(1,0)$ 的方案

# 两阶段议价游戏

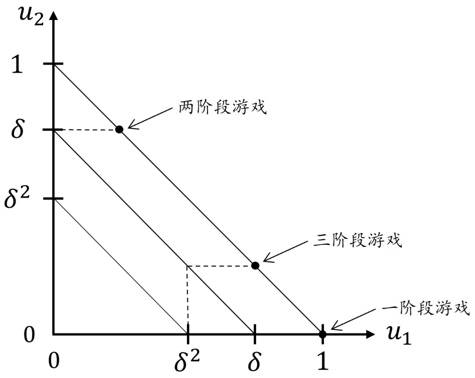
- 阶段一：玩家 1 向玩家 2 提出一个 1 元钱的分配方案 $(s_1, 1-s_1)$。如果玩家 2 接受，则按分配方案执行；如果玩家 2 拒绝，则进入下一个阶段，角色互换
- 阶段二：玩家 2 向玩家 1 提出一个 1 元钱的分配方案 $(s_2, 1-s_2)$。如果玩家 1 接受，则按分配方案执行；如果玩家 1 拒绝，则双方都没钱 $(0,0)$
- 折现：下一阶段的 1 元钱在现阶段只值 $\delta$ 元（$\delta < 1$）
- 逆向归纳法：玩家 2 需要思考如果阶段一拒绝，阶段二能够得到多少
- 如果 $s_1 \geq \delta \times 1$，则玩家 2 会接受；如果 $s_1 < \delta \times 1$，则玩家 2 会拒绝

# 多阶段议价游戏

- 多阶段游戏的最后一个阶段就是一个一阶段游戏
- 在两阶段游戏中，如果玩家 2 拒绝，则可在下阶段得到 1，但其现值只有 $\delta$
- 在三阶段游戏中，如果玩家 2 拒绝，则可在下阶段得到 $1-\delta$，但其现值只有 $\delta(1-\delta)$

| | 提议方 | 接收方 |
|---|---|---|
| 一阶段 | 1 | 0 |
| 二阶段 | $1-\delta$ | $\delta$ |
| 三阶段 | $1-\delta(1-\delta)$ | $\delta(1-\delta)$ |
| 四阶段 | $1-\delta(1-\delta(1-\delta)) = 1-\delta+\delta^2-\delta^3$ | $\delta(1-\delta(1-\delta)) = \delta-\delta^2+\delta^3$ |
| $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ |
| 十阶段 | $1-\delta+\delta^2-\delta^3+\cdots+\delta^8-\delta^9$ | $\delta-\delta^2+\delta^3-\cdots-\delta^8+\delta^9$ |

# 多阶段议价游戏



## 多阶段议价游戏

- $s_{10} = 1 - \delta + \delta^2 - \delta^3 + \cdots + \delta^8 - \delta^9 = \frac{1-\delta^{10}}{1+\delta}$ 和 $1 - s_{10} = \frac{\delta+\delta^{10}}{1+\delta}$
- $s_\infty = \frac{1}{1+\delta}$ 和 $1 - s_\infty = \frac{\delta}{1+\delta}$
- 假设讨价还价快速进行，则 $\delta \approx 1$ 以及 $s_\infty = 1 - s_\infty = 1/2$
- 均匀分配的条件：无穷阶段议价、没有折现或快速迭代、相同的折现因子 $\delta_1 = \delta_2$（相同的耐心程度，不耐心会处于劣势地位）
- 不会发生议价，第一个分配方案一定会被接受（即议价发生在脑海中）
- 现实中为什么还会发生议价呢？(议价对象的价值或时间价值未知造成低效、拒绝显得有耐心或者强势)

*Thanks!*